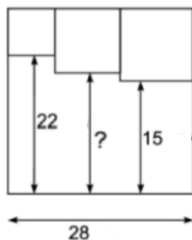


5 класс, решения и критерии проверки

(все задачи оцениваются исходя из 7 баллов, время на решение — 2.5 часа)

► **5-1.** Внутри квадрата расположены три меньших квадрата так, как показано на рисунке. Чему равна длина отрезка, обозначенного знаком вопроса?

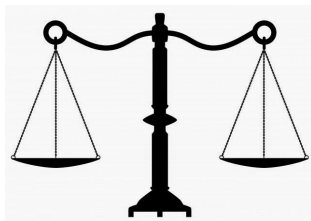


Ответ. 19.

Решение. Понятно, что сторона правого верхнего квадрата равна $28 - 15 = 13$, сторона левого верхнего квадрата — $28 - 22 = 6$. Тогда сторона среднего квадратика равна $28 - 6 - 13 = 9$, а искомый отрезок равен $28 - 9 = 19$.

Критерии проверки. Ответ без обоснования его единственности (с проверкой или без проверки): 2 балла.

► **5-2.** 6 монет лежат по кругу, причём 4 из них настоящие и весят поровну, а какие-то две соседние — фальшивые, одна легче настоящей, другая — тяжелее настоящей. Как найти две настоящие монеты за одно взвешивание на двухчашечных весах?



Решение. Взвесим две соседние монеты. Если они равны, то настоящие. Если не равны, то пара фальшивых монет пересекается с рассмотренной. Тогда можно выбрать две монеты, «противоположные» паре взвешенных монет.

► **5-3.** В каждой клетке доски 8×8 написано натуральное число (то есть какое-то из чисел $1, 2, 3, \dots$). Числа могут быть одинаковыми. Оказалось, что в любых двух квадратах 2×2 суммы чисел различны. Докажите, что одно из чисел на доске больше 12.

Решение. Посчитаем, сколько всего различных квадратиков 2×2 можно выделить в квадрате 8×8 . По горизонтали квадратик можно расположить семью способами, и семью же способами по вертикали, значит, всего квадратиков 49. В каждом из них сумма должна быть разной, значит, хотя бы в одном квадратике сумма не меньше 49. Отсюда максимальное число в этом квадратике не меньше 13.

Критерии проверки. Верно посчитано количество квадратиков 2×2 : 1 балл.

► **5-4.** У Саши и Наташи есть по длинной бумажной ленте, на каждой записано одно и то же стозначное число. Каждый разрезал свою ленту на 51 кусочек, получив 51 натуральное число. Могло ли так случиться, что у Саши на всех 51 кусочке числа чётные, а у Наташи — ровно на одном кусочке чётное число, а на остальных пятидесяти — нечётные?

Ответ. Нет, не могло.

Решение. Предположим, что такое могло произойти. Поскольку все числа из 51 кусочков Саши оказались чётными, то на каждом из кусочков последняя цифра чётна. Тогда в нашем стозначном числе есть хотя бы 51

чётная цифра. Аналогично, поскольку 50 чисел из кусочков Наташи оказались нечётными, то на каждом из этих 50 кусочков последняя цифра нечётна. Тогда в нашем стозначном числе есть хотя бы 50 нечётных цифр. Значит, суммарно уже должно быть хотя бы $50 + 51 > 100$ цифр, противоречие. Следовательно, такого быть не могло.

☛ **Критерии проверки.** Вывод получен на частном примере расстановки цифр или разбиения числа на 51 кусок: 0 баллов.

► **5-5.** Шесть команд сыграли турнир в один круг (то есть каждая команда сыграла с каждой по одному разу). За победу команда получала 2 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. Все команды набрали разное число очков. Могло ли оказаться, что суммарное количество очков, набранных тремя командами с наибольшими количествами очков, ровно в два раза больше суммарного количества очков, набранных остальными тремя командами?

📎 **Ответ.** Не могло.

📎 **Решение.** Всего команды набрали 30 очков. Если аутсайдеры набрали x очков, то лидеры — $2x$, а всего $3x = 30$ очков. Отсюда $x = 10$. Но в таком случае команда, занявшая четвёртое место, набрала не меньше 5 очков (потому что даже $4 + 3 + 2 < 10$). Отсюда следует, что лидеры набрали не менее, чем $6 + 7 + 8 > 20$ очков.

☛ **Критерии проверки.** Доказано, что лидеры должны набрать 20 очков и/или аутсайдеры должны набрать 10 очков: 2 балла.

► **5-6.** По кругу стоят 6 диванов, на каждом возлежат важные коты, на каждом диване есть хотя бы один кот. Все коты разного веса, всего 100 котов. Каждый кот сказал: «На следующем по часовой стрелке диване ровно половина котов легче, чем я, и ровно половина котов тяжелее, чем я!» Какое наибольшее количество котов могли сказать правду?

📎 **Ответ.** 98 котов.

📎 **Решение.** Самый толстый кот точно соврал, и самый легкий кот тоже точно соврал. Поэтому не более 98 котов сказали правду.

Приведем пример, показывающий, что 98 котов действительно могли сказать правду. Пронумеруем котов по возрастанию веса 1, 2, ..., 100 (1 — самый легкий, 100 — самый тяжелый). Посадим на один из диванов котов с номерами 1 и 100, а дальше на каждый предыдущий по часовой стрелке диван будем сажать поровну самых тяжелых и самых легких из оставшихся (это можно сделать многими разными способами). Тогда для всех, кроме 1-го и 100-го, ровно половина котов на следующем диване будет легче, и ровно половина — тяжелее.

☛ **Критерии проверки.** Только ответ: 0 баллов.

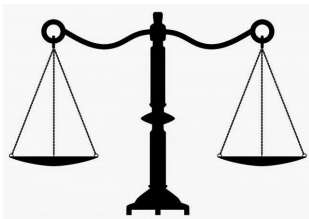
Только утверждение о том, что самый легкий и самый тяжелый кот точно соврут (с доказательством или без): 2 балла.


Только пример, показывающий, что 98 котов могли сказать правду: 4 балла.

6 класс, решения и критерии проверки

(все задачи оцениваются исходя из 7 баллов, время на решение — 3 часа)


► **6-1.** 6 монет лежат по кругу, причём 4 из них настоящие и весят поровну, а какие-то две соседние — фальшивые, одна легче настоящей, другая — тяжелее настоящей. Как найти две настоящие монеты за одно взвешивание на двухчашечных весах?





 **Решение.** Взвесим две соседние монеты. Если они равны, то настоящие. Если не равны, то пара фальшивых монет пересекается с рассмотренной. Тогда можно выбрать две монеты, «противоположные» паре взвешенных монет.

► **6-2.** В библиотеке есть 14 книжных полок, расположенных в ряд, на которых расставлено 327 книг. На любых трёх подряд идущих полках находится ровно 70 книг. Сколько книг стоит на 9-й полке?

 **Ответ.** 23.

 **Решение.** Разобьём полки на следующие тройки (1, 2, 3); (4, 5, 6); (7, 8, 9); (9, 10, 11); (12, 13, 14). Каждая полка, кроме 9-й участвует в этих тройках по одному разу, а 9-я — два раза. Значит, суммарное количество книг в этих пяти тройках равно $70 \cdot 5 = 350$ книг, что на 23 книги больше суммарного количества книг на всех полках, тогда эти 23 книги стоят на 9-й полке.

 **Решение.** Рассмотрим 4 подряд идущие полки a, b, c, d . Так как $a + b + c = b + c + d$, то $a = d$. Тогда на полках через две поровну книг. То есть количества книг таковы: $abc \ abc \ abc \ abc \ ab$. Тогда $a + b = 327 - 4 \cdot 70 = 47$, поэтому $c = 23$. На 9-й полке как раз находится $c = 23$ книг.

 **Критерии проверки.** Только верный ответ без обоснования или исходя из рассмотрения конкретных примеров: 1 балл.

Верный ход решения, получен неверный ответ только из-за вычислительной ошибки: 6 баллов.


Доказано заикливание $abcsabcs\dots$, дальнейших содержательных продвижений нет: 2 балла.

Решение основано на недоказанном заикливании $abcsabcs\dots$, остальное верно: 3 балла.

Замечание: Заметим, что a и b найти нельзя, т.к. условию удовлетворяют все варианты, где $a + b = 47$ и $c = 23$. Тем самым все решения, в которых удастся найти a и/или b , автоматически являются неверными и оцениваются, как правило, по первому критерию не более, чем в 1 балл.

► **6-3.** В классе 20 учеников. За контрольную некоторые ученики класса получили 5, некоторые — 4, некоторые — 3, некоторые — 2. Сумма полученных оценок оказалась равной 80. А чему равнялась бы сумма полученных оценок, если бы все, получившие 5, получили бы 2, получившие 4 — получили бы 3, получившие 3 — получили бы 4, а получившие 2 — получили бы 5?

 **Ответ.** 60.


 **Решение.** Каждый из учеников класса за две контрольные (состоявшуюся и гипотетическую) получил бы сумму оценок, равную 7. Значит, для всех 20 учеников класса сумма оценок была бы равна 140. И сумма полученных оценок за вторую контрольную равнялась бы $140 - 80 = 60$.


 **Критерии проверки.** Верный ответ приведён без обоснований: 1 балл.

Верный ответ получен из рассмотрения конкретных примеров: 2 балла.

► **6-4.** У Саши и Наташи есть по длинной бумажной ленте, на каждой записано одно и то же стозначное число. Каждый разрезал свою ленту на 51 кусочек, получив 51 натуральное число. Могло ли так случиться, что у Саши на всех 51 кусочке числа чётные, а у Наташи — ровно на одном кусочке чётное число, а на остальных пятидесяти — нечётные?


 **Ответ.** Нет, не могло.


 **Решение.** Предположим, что такое могло произойти. Поскольку все числа из 51 кусочков Саши оказались чётными, то на каждом из кусочков последняя цифра чётна. Тогда в нашем стозначном числе есть хотя бы 51 чётная цифра. Аналогично, поскольку 50 чисел из кусочков Наташи оказались нечётными, то на каждом из этих 50 кусочков последняя цифра нечётна. Тогда в нашем стозначном числе есть хотя бы 50 нечётных цифр. Значит, суммарно уже должно быть хотя бы $50 + 51 > 100$ цифр, противоречие. Следовательно, такого быть не могло.

 **Критерии проверки.** Вывод получен на частном примере расстановки цифр или разбиения числа на 51 кусок: 0 баллов.

► **6-5.** В клетки таблицы 2×100 (состоящей из 100 столбцов по 2 клетки) записаны 200 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что в каждом квадратике 2×2 сумма четырёх чисел одна и та же. Могло ли быть так, что в первом столбце записаны числа 20 и 67?


 **Ответ.** Нет.


 **Решение.** Если у двух квадратов 2×2 есть общий столбец, то суммы чисел в оставшихся двух столбцах этих квадратов равны. Следовательно, равны суммы чисел в 1-м, 3-м, 5-м, ... 99-м столбца. Если числа 20 и 67 стоят в первом столбце, то в таблице есть 50 столбцов с суммой $20 + 67 = 87$. Но представить число 87 в виде суммы двух различных натуральных чисел можно лишь 43 способами ($1 + 86, 2 + 85, \dots, 43 + 44$) — противоречие.

 **Критерии проверки.** Замечено, что есть 50 столбцов с суммой 87, дальнейших содержательных продвижений нет: 3 балла.


Задача верно решена в предположении, что суммы в столбцах через 1 равны, но это утверждение не доказано: 6 баллов.

► **6-6.** По кругу стоят 6 диванов, на каждом возлежат важные коты, на каждом диване есть хотя бы один кот. Все коты разного веса, всего 100 котов. Каждый кот сказал: «На следующем по часовой стрелке диване ровно половина котов легче, чем я, и ровно половина котов тяжелее, чем я!» Какое наибольшее количество котов могли сказать правду?

 **Ответ.** 98 котов.

 **Решение.** Самый толстый кот точно соврал, и самый легкий кот тоже точно соврал. Поэтому не более 98 котов сказали правду.

Приведем пример, показывающий, что 98 котов действительно могли сказать правду. Пронумеруем котов по возрастанию веса 1, 2, ..., 100 (1 — самый легкий, 100 — самый тяжелый). Посадим на один из диванов котов с номерами 1 и 100, а дальше на каждый предыдущий по часовой стрелке диван будем сажать поровну самых тяжелых и самых легких из оставшихся (это можно сделать многими разными способами). Тогда для всех, кроме 1-го и 100-го, ровно половина котов на следующем диване будет легче, и ровно половина — тяжелее.

 **Критерии проверки.** Только ответ: 0 баллов.

Только утверждению о том, что самый легкий и самый тяжелый кот точно соврут (с доказательством или без): 2 балла.

Только пример, показывающий, что 98 котов могли сказать правду: 5 балла.